

與傑利蠨螋共舞 — 選區劃分與統計物理學

文/鄒忠毅、李世炳

本文介紹如何將統計物理方法運用到政治學上的選區劃分問題中。

選區劃分問題是指，如何將一個較大的行政區域依照一定的政治學上的規則，劃分為數個選舉區。

我們認為，選區劃分問題與磁性系統中的現象有著類似的特徵。所以，我們把政治學上的選區劃分問題映射到磁性材料系統的 q -state Potts 模型上。在這個模型裡，我們以“里”這個最小行政單位為模型中的自旋單元，而種種選區劃分時的主要考慮（如票票等值，區域完整，作業方便等等），也被轉換為每個自旋單元間的交互作用與外場對系統的作用。而選區劃分問題也就成為尋找這個 q -state Potts 模型系統的基態問題，然後就可以用各種最佳化演算法來模擬與求解，進而找出最符合條件的劃分結果。

在本文中，我們將介紹選區劃分問題的基本概念及其爭議點，與我們近年來的一些相關成果。

關鍵字：選區劃分問題，Potts 模型，最佳化問題。



社會物理學

利用統計物理方法來研究社會經濟問題，近年來已成為物理研究的一個重要分支。研究者們延續著，自第谷 (Tycho)、克普勒 (Kepler)、牛頓 (Newton) 以來的，透過觀察現象、蒐集資料、尋找規律、建立理論、解釋及預測現象等過程的一套研究傳統，對社會經濟問題做了一些工作。這些研究者面對著複雜的社會現象，使用著統計物理方法與電腦模擬工具，由簡單的模型與交互作用出發，卻往往得到與真實現象相符的結果。關於這個領域的名稱，有些研究者稱它為經濟物理學 (Econophysics)，有些研究者稱它為社

鄒忠毅

中國文化大學物理系

e-mail : cichou@faculty.pccu.edu.tw

李世炳

中央研究院物理研究所

e-mail : spli@phys.sinica.edu.tw

會物理學 (sociophysics)。

在社會物理學研究中，研究者常常將社會群體分為大量的基本單元。藉由研究單元之間的交互作用網路及形式，再配合數學計算與電腦模擬，往往可以得到與真實世界相符的整體性質。研究者主要以統計物理及計算物理理論及技術，做為主要工具。目前，社會物理學已經在許多領域上，獲得了初步的成功結果。主要的應用，包含以下數方面：經濟學上的收入分配問題與市場波動問題。交通動力學上的行人動力學與車流問題。社會學上的輿論動力學、群體的形成與社會演化。另外在政治學上，也有選區劃分問題，得票結果分佈，投票行為預測與模擬等應用。

政治議題

在這些應用中，我們最有興趣的就是，關於政治學上選舉議題的應用。因為關於選舉，我國與世界各國已有許多的歷史資料可供分析與驗證，許多問題也

較易量化與建模。而台灣的選舉又特別多，加上立法委員選舉也正在選制轉變的關鍵點上。基於這些理由，我們做了一些研究工作。

我們的工作包含三個方向：首先是選舉前的準備工作 — 選區劃分，我們用統計物理中的 q -state Potts 模型進行更有效率的劃分作業^[1-5]。接下來是選舉中的得票預測，我們用一個網路上的政治期貨市場機制，可以較準確地預測得票結果^[6,7]。最後是選舉後的得票分佈分析^[8]與模擬，我們可以用一個簡單的細胞自動機模型，模擬選舉中意見傳播的過程與最後的得票分佈情況^[9]。

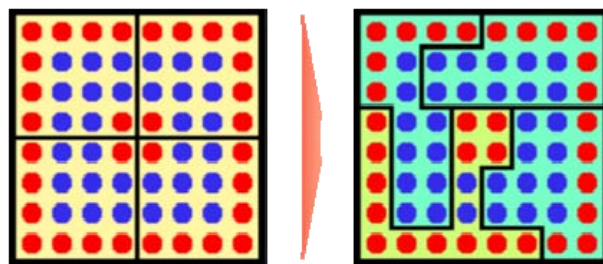
在本文中，我們將介紹選舉前的準備工作，也就是如何將統計物理方法運用在選區劃分問題上。以下結果就是我們這幾年的工作成果，文章內容也綜合取材自我們發表的一些文章，希望能對讀者做一個初步而簡單的介紹。如果讀者希望更深入了解我們的工作，歡迎參閱我們在參考資料中所列出的文章，或和我們聯絡。

選區劃分問題的基本介紹

我們所討論的選區劃分問題是指，如何將一個較大的行政區域（如縣或市）依照一定規則，劃分為數個選舉區。這個問題看起來並不難，可是在實際執行時卻容易產生許多爭議。我們以下面的例子做說明。

圖一中有一塊大區域，假設其中均勻地居住了 64 位選民，紅藍二黨的支持者各為 32 人且分佈如圖示。現在將此大選區分為平均的四塊。圖中兩種劃分法都滿足人口平均的原則（各選區 16 人），但是對選舉結果有不同影響。若採用圖一左的劃分方式，各選區的紅藍二黨的支持者人數相等，最後的選舉結果不可知（可能要由抽籤決定）。可是若採用圖一右的劃分方式，藍黨將以 3:1 的席次，贏得多數席位的勝利^[10]。當然，讀者可能一眼就會覺得右圖的劃分方式不公平且不好看（形狀奇怪），真實世界裡應該不會發生這種事。但是我們不要忘了，政治人物總是喜

歡用一些奇特的方式，勇敢地做一些事。



圖一：不同的選區劃分方式，造成不同的選舉結果^[10]。

真的就有政治人物敢這麼做！在 1812 年 Massachusetts 州長 Elbridge Gerry 爲了勝選，把選區劃分得奇形怪狀（圖二）。由於其中有個選區的形狀實在太奇怪，看起來像隻爬蟲類生物，結果被譏爲傑利蠃螈（Gerry + salamander = Gerrymander）。這說明了，爲了勝選，政治人物是很勇敢的！雖然在現代，比較沒有人敢明目張膽地這麼做了。但是選區劃分的爭議，仍然常在各國出現（在維基百科上“Gerrymander”這一項中，有許多例子^[10]）。



圖二：傑利蠃螈 (Gerrymander)^[10]

由於各國不同的歷史背景、社會結構及政治生

態，所以各國往往有著不同的劃分原則。但一般來說，在政治學的研究中，選區劃分依然有些共同規則要遵循^[11]。例如，各選區的選民數應該相近，以符合票票等值的原則。又選區的界線應該簡潔而連續，以避免歷史上傑利蠅螞的故事重演。還有選區最好與行政區域大致相符，以利選務行政作業等等。

在我們進行文獻蒐集的過程中，找到了一些用數學或模擬方法求解的例子。如 Kaiser^[12] 與 Nagel^[13] 使用局部搜尋法。George 等人^[14] 在紐西蘭的選區劃分上使用 location-allocation based iterative method。Garfinkel 與 Nemhauser^[15] 使用 implicit enumeration 方法。又由於此問題與數學上的區域劃分問題(the Districting (or zone design) Problem)有關，這類問題也被一些研究者認為屬於 NP-Complete 問題^[16]，適合以最佳化演算法求解。而在國內的研究裡，也有一些學理上定性的分析^[17,18,19]。

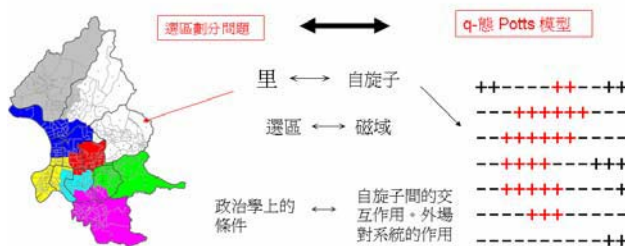
選區劃分問題與自旋系統的比較

在思考這個問題以後，我們發現，類似的題目我們在物理學中已經學過了。我們覺得，選區劃分問題與磁性材料系統中的極化現象有著類似的特徵。選區劃分問題中的種種性質與 q-state Potts 模型^[20]中的性質有很大的相似性。所以我們嘗試把政治學上的選區劃分問題映射到磁性材料系統的 q-state Potts 模型上。而最關鍵的工作也就是，如何把此問題轉換成適當的物理模型。

我們將“里”這個最小行政單位，對應到 Potts 模型中的自旋單元（自旋子），而“票票等值，區域完整，作業方便”等劃分時的主要考慮，也被對應為每個自旋子間的交互作用，和自旋單位與外場的交互作用。最後選區劃分問題也就轉換成，尋找此 q-state Potts 模型系統的基態問題。（圖三）。

接下來介紹，此 q-state Potts 模型的交互作用形式。這些交互作用是如何與真實世界中選區劃分的考慮相連接。其次再介紹我們如何以不同方法求解。

圖三：選區劃分問題與自旋系統的對應關係圖^[1]。



模型簡介

在本節中，我們將簡單介紹這個選區劃分的 q-state Potts 模型。模型的組成包含三部分：基本單位，交互作用網路與交互作用的能量項。以下分別介紹

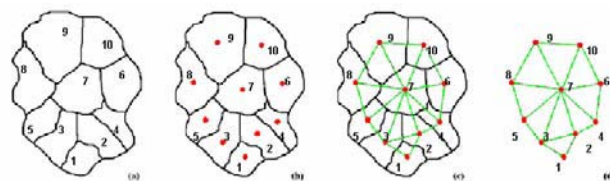
1. 系統的基本單位

我們將基本的行政單位“里”對應到 q-state Potts 模型中的一個自旋。若里的總數（也就是自旋子的數量）為 N ，選區的總數（也就是自旋子的可能狀態數）為 q ，且每一個里屬於一個選區，則每個自旋子的狀態函數（每個投票所可能的所屬選區）為 $S_i = (1 \dots q)$ 。

而我們的求解目標就是，找出符合給定條件的最好組合的各選區中，里的分佈（找出符合給定條件的最低能量組態的自旋子狀態分佈）。

2. 交互作用網路能量函數的建立

接下來我們要建立交互作用網路的空間分佈型態。我們以一個只有 10 個里的城市為例，解釋如何將各里轉換成一組互相連接的自旋網路系統（圖四）。



圖四：(a) 一個由 10 個里組成的城市，(b) 在每一個

里中取一點，建立一個自旋(spin)，(c) 將各點連接起來，(d)自旋系統的連接網路完成^[1]。

3. 交互作用能量函數的建立

我們希望寫出一組能量(目標)函數來表現政治學上選區劃分時的條件。在本文中，我們只考慮較易量化的三大原則：**票票等值**，**區域完整**，**作業方便**。我們得到了一個整體目標函數 E ，如

$$E = \lambda_P E_P + \lambda_D E_D + \lambda_A E_A,$$

其中 E_P 代表表現“**票票等值**”條件的能量函數， E_D 代表表現“**區域完整**”條件的能量函數， E_A 代表表現“**作業方便**”條件的能量函數。調整不同的 λ ，以改變各條件的重要性。然後求出不同參數下的解，就可得到不同考慮下的選區劃分的結果。

以下分別介紹各能量項。首先是表現“**票票等值**”條件的能量函數 E_P ：

$$E_P = \sum_{l=1}^q \left| 1 - \frac{P_l}{\langle P \rangle} \right|,$$

其中 P_l 為某態的總磁化強度(某選區總人口數)， $\langle P \rangle$ 為各選區平均人口數。可以看出此能量越小，各選區人口數越平均。

其次是表現“**區域完整**”條件的能量函數：

$$E_D = \sum_{\substack{i,j \\ j < i}} (1 - \delta_{S_i, S_j}) \cdot C_{i,j},$$

其中 C_{ij} 表示各里連接關係，兩里相鄰時 $C_{ij} = 1$ ，其他為零。可以看出此項能量代表位在選區邊界的里的數目。當此函數最小時，各選區位於邊界上的里最少，選區形狀也最完整。

最後是表現“**作業方便**”條件的能量函數。我們

使用外場表示現有行政區的影響。先假設此城市共有 n_d 個行政區，則可定義自旋子外場函數 $H = (1 \cdots n_d)$ (它代表各里所屬行政區，此值需事先輸入)。然後能量函數 E_A 可定義如下：

$$E_A = \sum_{\substack{i,j \\ j < i}} -\delta_{S_i, S_j} \cdot \delta_{H_i, H_j} \cdot C_{i,j}$$

可看出當此函數越小時，每一選區中的行政區域越少，較便於行政作業。

在本文中，我們只介紹最簡單的能量函數。至於更詳細的介紹，與其他還有一些考慮條件，如最大可能當選人數條件，風土與聚落條件等等，請讀者參考我們的其他文章^[1-5]。

4. 重要性的取捨

如前所述，在寫出能量函數後，只要調整不同的 λ ，就可得到不同參數考慮下的選區劃分的結果。但是，這還存在著一個重要問題，就是哪一組參數最好？或者說，哪一個條件較為重要？我們覺得，選區劃分問題中各項條件重要性的取捨，不可以由我們決定，而必須由另外的機制來判斷。判斷的結果，代表了全民關於“票票等值，區域完整，作業方便”三項原則的價值取向。所以我們以為，在民主國家，應該由法院或及立法機構來決定。我們期望，我們的工作能使大家在做決定時較輕鬆點。人們只需決定三項原則重要性的比例大小，對應的劃分結果即可由電腦迅速畫出。

同時，我們也希望透過這個模型，來檢驗現有的劃分結果。由劃分結果反推出對應的三項原則重要性的比例大小，以此來做為評論各種劃分結果的特色及優劣點的相對量值。如此不僅能幫助主管機構規劃及決定選區劃分方案，也幫助一般民眾更容易了解及參與選區劃分作業，達到提高效率及防弊的功能。

求解

在寫下模型與對應的能量函數之後，整個政治上選區劃分問題，就轉化為 Potts 模型系統如何求基態解的最佳化問題 (Optimization Problems)。

我們以數個系統為測試目標，包括由實際的臺北市地圖所建立的系統 (圖五)，及兩種晶格系統與隨機產生的人工城市系統 (圖六)。然後用數種最佳化演算法來對此問題求解。首先是“模擬退火法 (Simulated Annealing Method) [2]”，在計算過程中，我們看到一些有趣的結果。如圖七顯示溫度與系統平均能量及系統比熱的關係。顯示了本系統可能存在一些相變現象及普適性。其次，我們改進了“遺傳演算法 (Genetic Algorithm) [4]”，使其能被應用在此類自旋系統中。我們認為對於選區劃分問題類的自旋系統，遺傳時的主要信息，應該是邊界形狀。所以我們設計了一種新的交配程序，使子代能遺傳到親代的主要信息 (圖八)。另外我們也改進了突變效率極低的問題。最後，使用我們發展的“知識進化演算法 (Knowledge-based Evolution Algorithm) [21-25]”，加速了演算效率。這個演算法嘗試藉由，模擬人類透過知識的累積而促進文明演進的過程，來進行較有效率的最佳化搜尋。在應用到選區劃分時，我們用邊界結構的分布，作為導引函數。圖九展示導引函數(邊界的統計分布圖，白色的程度代表邊界的密度)，世代演化的結果，可以看出邊界分布逐漸清楚，最低能量結構也逐漸找出。

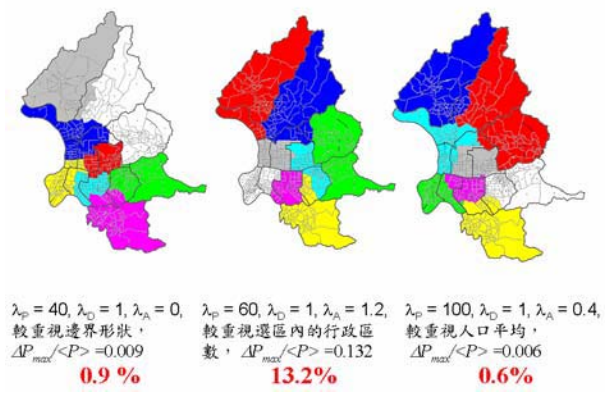


圖 五: 某些參數下，北市選區劃分結果圖[2]。

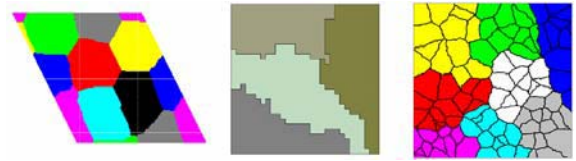


圖 六: 人工城市系統，左: 三角晶格[2]，中: 正方晶格[4]，右: 隨機晶格系統[5]

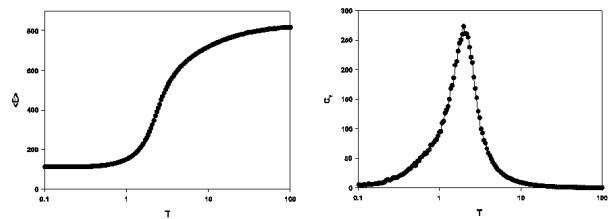


圖 七: (左圖) 台北市的溫度(T)對系統能量(<E>)圖，(右圖) 溫度(T)對系統比熱(Cv)圖[2]。

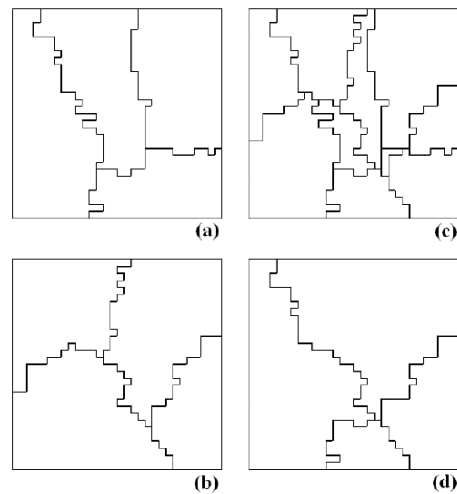


圖 八: 改進的交配方式的進行過程：
 (a)(b) 親代邊界結構，(c) 親代的混合邊界結構，(d) 產生的子代[4]。



圖九：導引函數(邊界分布圖)，世代演化的結果。
(左：第一代，中：第二代，右：第三代)^[1]

結語與感想

運用物理學方法去研究社會民生等課題是一個非常有趣的領域，但到目前為止，很少社會民生課題可以利用物理模型去研究並加以量化。選區劃分問題就是一個少有的例子。透過我們的研究，不僅可以更瞭解相關社會複雜系統中現象的產生機制。我們更期望這種社會物理學的研究方法，能使傳統的社會科學計量研究(如計量經濟學、計量政治學等)更加豐富。

另外，選區劃分問題，也與台灣社會的實際需要直接相關。由於選區劃分直接與地方政治生態有關，所以各選區實際劃分的過程，受到了社會大眾的關注。所以我們覺得，如果有一個可以量化的系統性的方法，是可以減少很多爭議的。

所以我們利用統計物理方法，建立一個能應用在選區劃分問題上的假想物理模型，然後利用各種方法求解。最後希望將這些相關方法，拓展到更多領域裡。對於台灣社會已經面對的選區劃分問題，我們也希望能提供相關單位與社會群眾一個較為客觀與量化的分析方法。讓大家能夠較理性的參與公共討論，或是讓大家心情好一點(最少我們在做這研究時是如此)。

在研究這個問題時，因應台灣的複雜(或討厭)的政治生態。我們必須保持以下的態度：一，中立：不限立場，歡迎大家參加，二，公開：結果公開發表，大家都可使用，三，負責：劃清負責範圍，我們只對我們的研究負責。

這些分析及計算的方法，可以應用在更多相關問題上。包含一些社會與物理交叉問題^[26,27,28]、組合最佳化問題^[29]，及其他形式的區域劃分問題(如學區的劃分，樓層分配(Floor Planning Problem))，以及如“q-partitioning of graph problem”、“chromatic number

problem^[30]”與“community detection in network and society^[31,32]”等問題。

以上報告，只是我們考慮了較易量化與建模的一些性質後，所完成的初步結果。真實政治世界，遠比我們的簡單模型複雜許多。但無論如何，我們提供了一個新的研究方向。未來透過大家的參與和討論，也許可以使這項研究，具有更大的應用價值。

感謝

本文作者感謝所有參與本文研究與討論的人員，他們是：

一，老師：中國文化大學物理系：黃信健主任。中國文化大學政治研究所：楊泰順教授。

二，學生：中國文化大學物理系：朱祐苓，曾建誌，涂悅琪，方彥理，余仁傑，李彥慧，邵天嬋。中國文化大學政治研究所：陳彥祐，趙志勳

參考資料

- [1] 鄒忠毅，李世炳，“從極化現象看選區劃分問題——物理學與政治學之交匯”，收錄於「單一選區兩票制」專書，梁世武主編，臺灣商務印書館，2008年1月初版，ISBN 978-957-05-2247-1。
- [2] Chung-I Chou and Sai-Ping Li, *Physica A* **369**, 799, (2006).
- [3] Chung-I Chou and Sai-Ping Li, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, V **310**, 2889, (2007).
- [4] Chung-I Chou, You-ling Chu, and Sai-Ping Li, *Lecture Notes in Computer Science* **4490**, 1163, (2007).
- [5] Chung-I Chou and Sai-Ping Li, *International Journal of Modern Physics B* **21**, 3975 (2007).
- [6] S.C. Wang, J.J. Tseng, C.C. Tai, K.H. Lai, S.H. Chen and S.P. Li, "Network Topology of an Experimental Futures Exchange", published online 21 March 2008 in *European Physical Journal B* (2008).

- [7] 臺灣政治期貨交易中心網址：
<http://socioecono.phys.sinica.edu.tw/>
- [8] 鄒忠毅、林宜柔、李世炳，“社會物理學在政治學上的應用---台灣立法委員選舉得票分佈的分析”，2008中華民國物理學會年會暨研究成果發表會，發表日：2008/1/28，發表地：新竹。
- [9] Chung-I Chou and Sai-Ping Li, 即將發表。
- [10] Gerrymandering. (2007, June 19). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved 01:21, June 21, 2007, from <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Gerrymandering&oldid=139227479>
- [11] A. Mehrotra, E.L. Johnson and G.L. Nemhauser, *Manage. Sci.* **44**, 1100, (1988).
- [12] H. Kaiser, *Midwest Journal of Political Science*, **χ**, (1966).
- [13] S. Nagel, *Stanford Law Review* **17**, 863, (1965).
- [14] J.A. George, B.W. Lamar and C.A. Wallace, *Proceedings of the Operational Research Society of New Zealand* **29**, 276, (1993).
- [15] R.S. Garfinkel and G.L. Nemhauser, *Manage. Sci.*, **16**, 495, (1970).
- [16] M. Altman, *Rutgers Comput. and Technical Law J*, **23**, 81, (1997).
- [17] 朱雲漢、黃德福與江大樹，《國家政策雙週刊》，第 25 期（1992）。
- [18] 潘誠財，《復興崗學報》，第 72 期（2001）。
- [19] 陳華昇與涂志堅，《國家政策論壇》，第 2 卷第 7 期（2002）。
- [20] R.B. Potts, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **48**, 106, (1952).
- [21] C. I. Chou and T. K. Lee, *Acta Cryst. A* **58**, 42, (2002).
- [22] 李世炳、鄒忠毅，物理雙月刊，24 卷 2 期 307（2002）。
- [23] C. I. Chou, R. S. Han, S. P. Li and T. K. Lee, *Physical Review E* **67**, 066704, (2003).
- [24] C.I. Chou, R. S. Han, T.K. Lee and S. P. Li, *Lecture Notes in Computer Science* **2690**, 447, (2003).
- [25] S. P. Li, *Journal of Modern Physics C* **13**, 1365, (2002).
- [26] J. P. Bouchard and M. Potters, *Theory of Financial Risks* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [27] R.M. Mantegna and H.E. Stanley, *An Introduction to Econophysics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [28] J. Voit, *The Statistical Mechanics of Financial Markets* (Springer, Berlin, 2001).
- [29] Y. Fu and P.W. Anderson, *Journal of Physics A* **19**, 1605, (1986).
- [30] P.Y. Lai and Y.Y. Goldschmidt, *Journal of Statistical Physics* **48**, 513, (1987); Y.Y. Goldschmidt and P.Y. Lai, *Journal of Physics A* **21**, L1043, (1988).
- [31] M.E.J. Newman, *the European Physical Journal B* **38**, 321, (2004).
- [32] G. Palle et.al., *Nature* **435**, 814, (2005).